1 Números reales

Para iniciar el estudio de este bloque temático, relativo al análisis de funciones, es importante recordar algunas propiedades del conjunto de los **números reales,** así como algunas definiciones a propósito de los conjuntos numéricos de la **recta real.**

En primer lugar, el conjunto de los números reales está formado por los **números racionales** y los **irracionales** y se puede representar en una recta en la que se han determinado un origen y una unidad, de tal modo que, a cada número real le corresponde un único punto de la recta, y a cada punto de la recta se le puede asignar un único número real. Por este motivo, en alguna ocasión se habla de puntos en lugar de números reales, y se habla de recta real en lugar de conjunto de los números reales.

Los números irracionales complementan el conjunto de los números racionales, puesto que ocupan los huecos que dejan estos en la recta numérica.

Las principales **propiedades** de los números reales son:

1. El conjunto de los números reales, con las operaciones de adición y multiplicación, posee estructura de **cuerpo conmutativo** o **abeliano.**

De esta propiedad se deducen las reglas habituales de operaciones con igualdades.

2. En el conjunto de los números reales se puede definir una **relación de orden** del siguiente modo:

Dados dos números reales a y b, a es menor o igual que b si se cumple que $b-a$ es un número real positivo o nulo, es decir:

$$a \leq b \Leftrightarrow b-a \geq 0$$

Esta es una relación de orden total, puesto que para cualquier par de números reales, a y b, se cumple que:

$$a \leq b \text{ o } a \geq b \text{, es decir, o } a<b \text{ o } b<a \text{ o } a=b$$

En $\mathbb{R}$, la relación de orden cumple las siguientes propiedades:

- Si $a \leq b$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$, entonces $a+c \leq b+c$.
- Si $a \leq b$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$, $c>0$, entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$.

  Si $a \leq b$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$, $c<0$, entonces $a \cdot c \geq b \cdot c$.

La noción de orden permite definir en la recta real los siguientes **conjuntos numéricos:**

Supongamos $a \leq b$.

- **Intervalo abierto** de extremos a y b: $(a, b)=\{x \in \mathbb{R} \mid a<x<b\}$.

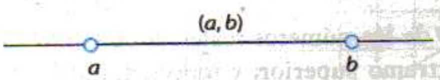


FIGURA 7.1.

- **Intervalo cerrado** de extremos a y b: $[a, b]=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

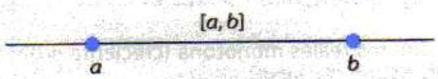


FIGURA 7.2.

Recuerda

Para representar los números reales en una recta numérica se acepta el llamado **axioma de continuidad** o **lema de Cantor:** dada una sucesión de segmentos encajados, existe un único punto común a todos ellos.

Valor absoluto

Se define el **valor absoluto** de un número a, $|a|$, como el mayor de los dos números $-a$ y a.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

1. $|a| = |-a|, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$
3. $a \leq |a|; -a \leq |a|, \forall a \in \mathbb{R}$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|, \forall a,b \in \mathbb{R}$
5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \forall a,b \in \mathbb{R}$
6. $|a| - |b| \leq |a-b| \leq$
$\leq |a| + |b|, \forall a,b \in \mathbb{R}$

Observa

Cuando escribimos $|x| < r$, por la definición de valor absoluto, esta desigualdad es equivalente a las desigualdades:

$$x < r \text{ y } -x < r$$

Como la segunda desigualdad es la misma que $x > -r$, se pueden escribir las dos como:

$$-r < x < r$$

Por este motivo, es igual:

$$a - r < x < a + r$$

que:

$$-r < x - a < r$$

Luego:

$E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$

Acotación

Un conjunto A está **acotado superiormente** por k si:

$$\forall x \in A, x \leq k$$

Para un conjunto acotado superiormente, existen infinitas cotas superiores. La menor de ellas se denomina extremo superior o **supremo.** Cuando el extremo superior de un conjunto A acotado superiormente pertenece a A, se denomina **máximo** de A.

Análogamente se puede definir **conjunto acotado inferiormente,** extremo inferior o **ínfimo,** y **mínimo** de un conjunto A.

Cuando un conjunto está acotado superior e inferiormente, se dice que está **acotado.**

- **Intervalo semiabierto o semicerrado** de extremos a y b: son conjuntos numéricos que solo contienen uno de los extremos:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

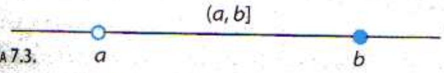


FIGURA 7.3.

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

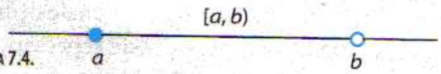
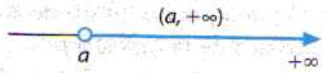


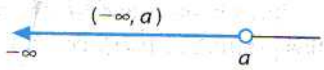
FIGURA 7.4.

- **Intervalos infinitos:** se denominan de este modo los conjuntos numéricos: $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$ y $[a, +\infty)$, y se representan mediante semirrectas en la recta real.

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

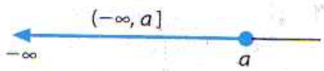


$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



FIGURAS 7.5.

- **Entorno abierto** de centro a y radio r, $r > 0$:

$$E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - r < x < a + r\}$$

Esta definición desempeña un papel muy importante en análisis. Utilizando el concepto de valor absoluto de un número, se puede reescribir como:

$$E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}$$

Geométricamente, $|x - a|$ es la **distancia** entre los puntos x y a, por lo que el entorno abierto de centro a y radio r es el conjunto de puntos x cuya distancia al punto a es menor que r.

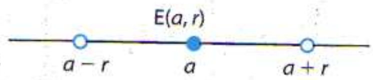


FIGURA 7.6.

Cuando se consideran los puntos de un entorno de a excluido el propio punto a se denomina **entorno reducido** de a y se denota $E^*(a, r)$:

$$E^*(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < r\}$$

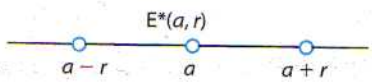


FIGURA 7.7.

Para todo punto x de un intervalo abierto (a, b), existe un entorno de x, totalmente contenido en (a, b): $E(x, r) \subset (a, b)$. Esta particularidad no se cumple para todos los puntos de un intervalo cerrado, $[a, b]$, puesto que no se cumple en $x = a$ ni en $x = b$.

3. En el conjunto de los números reales, todo conjunto acotado superiormente tiene **extremo superior,** y todo conjunto acotado inferiormente tiene **extremo inferior.**

Esta tercera propiedad y el axioma de continuidad son equivalentes, y, así mismo, son equivalentes a la siguiente propiedad:

Toda sucesión de números reales monótona (creciente o decreciente) y acotada tiene **límite.**

2 Función real de variable real

2.1. Definición

Toda aplicación de un subconjunto *A* de los números reales $\mathbb{R}$ en el conjunto $\mathbb{R}$ se denomina **función real de variable real.**

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

Observa

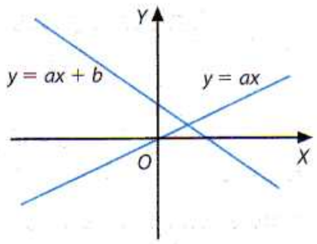
La denominación *función real de variable real* se aplica a las funciones cuyo recorrido es un subconjunto de $\mathbb{R}$ (función real) y cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ (de variable real).

El subconjunto A constituye el **dominio** de la función, es decir, el conjunto de valores reales que tienen imagen por *f*.

El conjunto de imágenes por *f* es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que se denomina **recorrido** o **imagen** de la función.

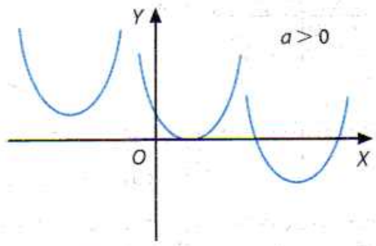
En un sistema de ejes de coordenadas en el plano, el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$, con $x \in A$, constituye la gráfica de la función *f*.

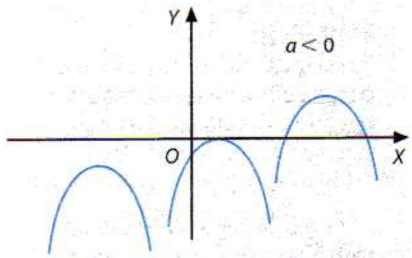
A continuación, se muestran las gráficas de algunas funciones elementales y se indican sus dominios y sus recorridos:



$f(x) = p_1(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, es una función polinómica de primer grado.
Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = \mathbb{R}$

FIGURA 7.8.a.





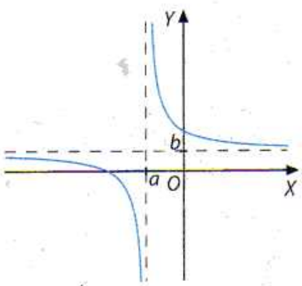
$f(x) = p_2(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, es una función polinómica de segundo grado. Dom $f = \mathbb{R}$.

Si $a > 0 \Rightarrow$ Rec $f = \left[f\left(-\dfrac{b}{2a}\right), +\infty\right)$

FIGURA 7.8.b.

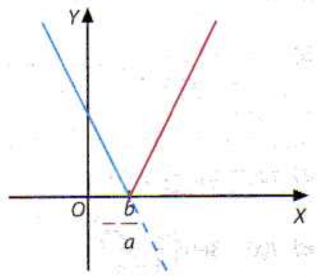
Si $a < 0 \Rightarrow$ Rec $f = \left(-\infty, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right]$

FIGURA 7.8.c.



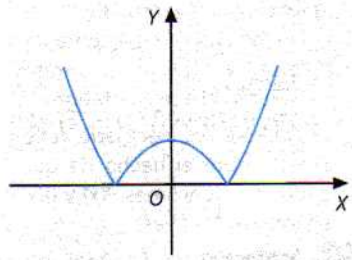
$f(x) = \dfrac{k}{x-a} + b$ es una función racional.
Dom $f = \mathbb{R} - \{a\}$, Rec $f = \mathbb{R} - \{b\}$

FIGURA 7.8.d.



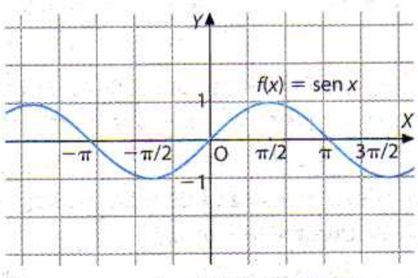
$f(x) = |ax + b|$, con $a \neq 0$, es la función valor absoluto de un polinomio de primer grado.
Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [0, +\infty)$

FIGURA 7.8.e.



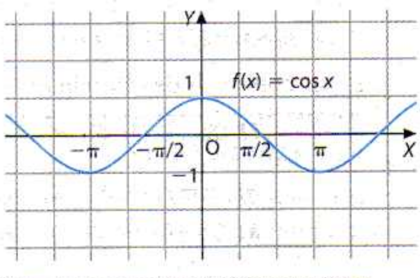
$f(x) = |ax^2 + b|$, con $a \neq 0$, es la función valor absoluto de un polinomio de segundo grado.
Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [0, +\infty)$

FIGURA 7.8.f.



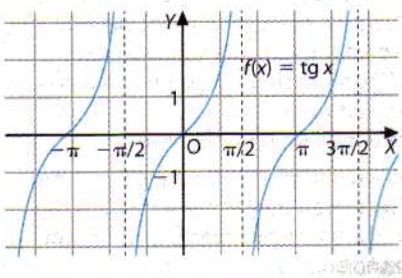
$f(x) =$ sen x es una función trigonométrica.
Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [-1, 1]$

FIGURA 7.8.g.



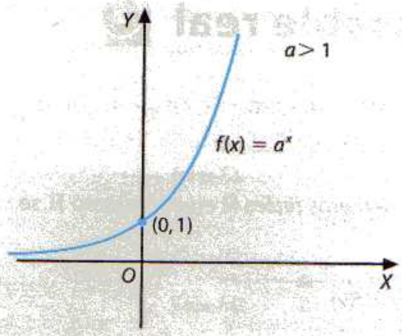
$f(x) = \cos x$ es una función trigonométrica.
Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [-1, 1]$

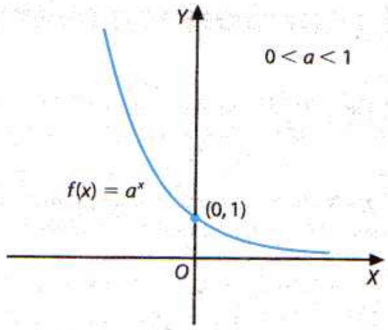
FIGURA 7.8.h.



$f(x) =$ tg x es una función trigonométrica.
Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}, \forall k \in \mathbb{Z}$, Rec $f = \mathbb{R}$

FIGURA 7.8.i.

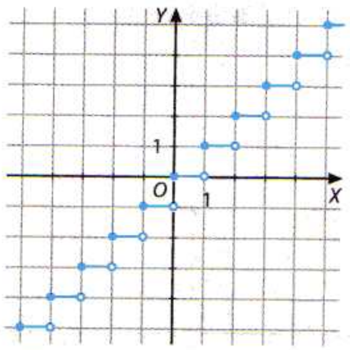




$f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, es la función exponencial.
Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = (0, +\infty)$

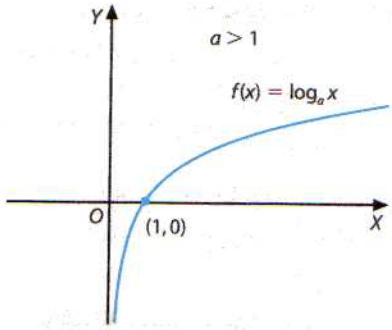
FIGURA 7.8.j.

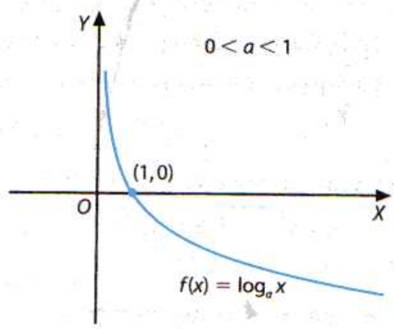
FIGURA 7.8.k.



$f(x) = E(x)$ o $f(x) = [x]$, es la función parte entera.
Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = \mathbb{Z}$

FIGURA 7.8.n.





$f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, es la función logarítmica.
Dom $f = (0, +\infty)$, Rec $f = \mathbb{R}$

FIGURA 7.8.l.

FIGURA 7.8.m.

Actividades

1 PAU Calcula los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{5x^2 + 1}$

b) $f(x) = \ln(5 - x^2)$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3 - x}}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2}{x^2} - 1\right)$

e) $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

f) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + x - 1}$

g) $f(x) = \text{tg}\left(\dfrac{x}{x + 1}\right)$

h) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x - 1)}$

i) $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}$

j) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

k) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

l) $f(x) = (1 + x)^{1/x}$

m) $f(x) = 2^{1/(1 - \text{tg}\, x)}$

n) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 1}{x + 2} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{2 - x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solución: ***a)*** Dom $f = \mathbb{R}$ ***b)*** Dom $f = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ ***c)*** Dom $f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 3]$ ***d)*** Dom $f = (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$ ***e)*** Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$ ***f)*** Dom $f = \mathbb{R}$ ***g)*** Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-1, \dfrac{(2k - 1)\pi}{2 - (2k - 1)\pi}\right\}, k \in \mathbb{Z}$ ***h)*** Dom $f = (1, 2) \cup (2, +\infty)$ ***i)*** Dom $f = [-2, 2]$ ***j)*** Dom $f = [-1, 1)$ ***k)*** Dom $f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ ***l)*** Dom $f = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ***m)*** Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$ ***n)*** Dom $f = (-\infty, -2) \cup (-2, \sqrt{2}]$

Recuerda

Para resolver las actividades, conviene tener en cuenta las técnicas de cálculo de límites estudiadas el curso anterior.

Además, es necesario reflexionar sobre el hecho de que, dadas dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, el dominio de f^g es:

Dom (f^g) = Dom $f \cap$ Dom $g - \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0 \text{ y } f(x) = g(x) = 0\}$